Sesión de Preparación de Olimpiada Matemática

8 de Noviembre de 2019. Fernando Mayoral `mayoral@us.es`

Combinatoria y estrategias

Combinatoria.

1) Formas de ordenar n elementos: $n!$.

2) Formas de seleccionar:

   - 2 elementos de un conjunto de n: $\dfrac{n(n-1)}{2}$.
   - 3 elementos de un conjunto de n: $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}$.
   - k elementos de un conjunto de n: $\dfrac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{k!}$.

3) Los números combinatorios. Algunas propiedades. El triágulo de Pascal/Tartaglia.

4) Número de subconjuntos (formas de elegir elementos) de un conjunto con n elementos: 2^n (contando al subconjunto vacio$\equiv$ no elegir ningún elemento).

Principio del palomar. Siendo m y n números naturales.

1) Para colocar $m+1$ palomas en m nidos, en algún nido hay que poner, al menos, 2 palomas .

2) Para colocar $m+1$ palomas en n nidos, en algún nido hay que poner, al menos, $\left[\dfrac{m}{n}\right]+1$ palomas.

3) Si un conjunto con una cantidad infinita de elementos se divide en una cantidad finita de subonjuntos, entonces alguno de los subconjuntos tiene que tener una cantidad infinita de elementos.

Ejercicio 1. Se dice que un número es *bacheado* si sus dígitos crecen y decrecen (estrictamente) alternativamente de izquiera a derecha. Por ejemplo, 23140 es *bacheado* y 23410 no lo es.

a) Determina la diferencia entre el mayor y el menor número *bacheado* de 5 dígitos (números entre 10000 y 99999).

b) ¿Cuántos números bacheados de 5 dígitos tienen un 5 como dígito central?

c) Calcula el número total de números bacheados de 5 dígitos.

....

Ejercicio 2. Se colocan 2006 puntos de forma aleatoria en una circunferencia (pero de forma que dos puntos no ocupen la misma posición). Calcula el número total de polígonos convexos con todos sus vértices entre los puntos dados. *Número total de subconjuntos de un conjunto. Formas de elegir dos elementos de un conjunto.*

....

Ejercicio 3. Un cuadrado $ABCD$, de lado 7×7, se divide en 49 cuadrados iguales mediante segmentos paralelos a sus lados. Determina el número total de caminos para ir de A a C a través del mallado resultante si sólo se permiten movimientos según los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AD}$.

....

Ejercicio 4. Determina el número de triángulos en los que dos de sus lados son $m = 6$ y $n = 9$ y el otro lado es un número entero. Resuelve el mismo problema con m y n genéricos $1 \leq m \leq n$.

. . . .

Ejercicio 5. Demostrar que dado un conjunto de 5 números naturales siempre hay 3 de dichos números cuya suma es divisible por 3. *Restos de dividir por 3. Principio del palomar.*

. . . .

Ejercicio 6. En cada vértice de un cuadrado se escribe 1 ó -1. A continuación, en cada etapa, se sustituye el número por el producto de dicho número por el de los dos que hay en los dos vértices adyacentes. Prueba que la única forma de llegar a la situación en la que hay un 1 en cada vértice después de un cierto número de etapas es que hay un 1 en cada vértice en la posición inicial. *Búsqueda de invariantes.*

. . . .

Ejercicio 7. Considera el conjunto de números enteros positivos n cumpliendo que $1 \leq n \leq 1000000$. En ese conjunto, indica si es mayor la cantidad de números que pueden expresarse de la forma $a^3 + mb^3$, con $a, b \in \mathbb{N}$ y $m \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ o la cantidad de números que no pueden expresarse de esa manera.

. . . .

Ejercicio 8. Cada punto del plano se colorea de un color A o de un color B. Prueba que hay dos puntos del mismo color tales que la distancia entre ellos es una cantidad prefijada.

. . . .

Ejercicio 9. Cada vértice de un hexágono regular se colorea de un color A o de un color B. ¿De cuántas formas distintas se pueden pintar los vértices. *Se considera que dos pinturas son distintas si no hay ninguna isometría entre ellas. No se puede obtener una de la otra girando o por simetría respecto al centro o respecto a una recta apropiada.*

. . . .

Ejercicio 10.

a) Se tienen dos urnas y en cada una de ellas se ponen tres papeletas dentro de un sobre. En cada urna hay dos papeletas de color rojo y una de color azul. Se saca una papeleta de cada urna. Calcula la probabilidad de alguna de las papeletas sea azul.

b) Resuelve el mismo problema con 3 urnas.

c) Resuelve el mismo problema con n urnas.

. . . .

Referencias

[1] R. Geretschlager, J. Kalinowski, and J. Svrcek, *A Central European Olympiad, The Mathematical Duel*, Problem Solving in Mathematics and Beyond, vol. 7, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2018.

[2] Jiagu Xu, *Lecture notes on Mathematical Olympiad courses—for senior section. Vol. 1, 2*, Mathematical Olympiad Series, vol. 8, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2012.

[3] A. M. Yaglom and I. M. Yaglom, *Challenging mathematical problems with elementary solutions. Vol. I: Combinatorial analysis and probability theory*, Holden-Day, Inc., San Francisco, Calif.-London-Amsterdam, 1964.